Задачи за домашна работа по механика

Зад. 1 Материална точка с маса m се движи под действието на две еластични сили $F_{\text{ел1}} = -k\vec{r}$ $(k > 0)$ и $F_{\text{ел2}} = -k(\vec{r} - \vec{u}t)$ $(\vec{u} = \text{const})$. Да се намери закона за движение $\vec{r}(t)$, ако $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ и $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$.

Отг. $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos\omega t + \frac{1}{\omega}\left(\vec{v}_0 - \frac{\vec{u}}{2}\right)\sin\omega t + \frac{\vec{u}t}{2}$, $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

Зад. 2* Материална точка с маса m и заряд $q > 0$ се намира в среда, която ѝ оказва сила на съпротивление $\vec{F}_{\text{съпр}} = -b\vec{v}$, $b > 0$. На частицата действа постоянно и хомогенно магнитно поле с индукция $\vec{B} = (0, 0, B)$, $B > 0$. Да се намери закона за движение $\vec{r}(t)$, ако $\vec{r}(0) = 0$ и $\vec{v}(0) = (v_0, 0, 0)$, $v_0 > 0$.

Отг. $x(t) = \frac{bmv_0}{q^2B^2+b^2} + \frac{mv_0 e^{-\frac{bt}{m}}}{q^2B^2+b^2}(qB\sin\omega_c t - b\cos\omega_c t)$, $y(t) = -\frac{qBmv_0}{q^2B^2+b^2} + \frac{mv_0 e^{-\frac{bt}{m}}}{q^2B^2+b^2}(b\sin\omega_c t + qB\cos\omega_c t)$, $z(t) = 0$, $\omega_c = \frac{qB}{m}$.

Зад. 3 Частица с маса m се движи по винтова линия със стъпка h, навита върху вертикален кръгов цилиндър с радиус R $\left(x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ z = \frac{h\varphi}{2\pi}\right)$. На частицата действа силата на тежестта $\vec{G} = m\vec{g}$, $\vec{g} = (0, 0, -g)$, както и еластична сила $F_{\text{ел}} = -k\vec{r}$. Съставете уравнението на Лагранж от II род и намерете закона за движение $\vec{r}(t)$ при произволни начални условия.

Отг. $x(t) = R\cos\varphi(t)$, $y(t) = R\sin\varphi(t)$, $z(t) = \frac{h\varphi(t)}{2\pi}$, $\varphi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t - \frac{2\pi mg}{kh}$, $\omega = h\sqrt{\frac{k}{m(4\pi^2R^2+h^2)}}$, $A, B = \text{const}$.

Зад. 4* Материална точка с маса m е принудена да се движи върху ротационен параболоид с уравнение $z = (x^2 + y^2)/\ell$, $\ell > 0$, като на частицата действа еластична сила с коефициент на еластичност k и център във върха на параболоида, т.е. $\vec{F}_{\text{ел}} = -k\vec{r}$. Преминете към цилиндрични координати (ρ и φ са най-подходящи за обобщени координати) и съставете уравненията на Лагранж от II род.

Отг. Съответните уравнения на Лагранж от II род са $m\left(1 + \frac{4\rho^2}{\ell^2}\right)\ddot{\rho} + \frac{4m\rho\dot{\rho}^2}{\ell^2} = m\rho\dot{\varphi}^2 - k\rho - \frac{2k\rho^3}{\ell^2}$ и $\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = 0$.

Зад. 5 Кеплеровата задача се описва с лагранжиана $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r}$, където m и α са положителни константи. Изведете хамилтониана $H(r, \varphi, p_r, p_\varphi)$ на механичната система и напишете уравненията на Хамилтон.

Отг. $H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$. Уравненията на Хамилтон са: $\dot{r} = \frac{p_r}{m}$, $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$, $\dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2}$, $\dot{p}_\varphi = 0$.

Зад. 6 Намерете скобките на Поасон $\{p_i, (\vec{a}\cdot\vec{r})^2\}$ и $\{\vec{a}\cdot\vec{L}, \vec{b}\cdot\vec{L}\}$, ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са константни вектори, $\vec{r}$ е радиус-векторът на дадена материална точка, p_i е нейната i-та компонента на импулса, а $\vec{L}$ е моментът на импулса на материалната точка.

Отг. $\{p_i, (\vec{a}\cdot\vec{r})^2\} = -2(\vec{a}\cdot\vec{r})a_i$, $\{\vec{a}\cdot\vec{L}, \vec{b}\cdot\vec{L}\} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{L}$.